

PROGRAMME DE COLLE - SEMAINE N° 18: du 03/03/2025 au 07/03/2025

Connaissances minimales attendues

Chapitre 11 - Équations différentielles, systèmes différentiels

- Équation différentielle. Ordre d'une équation différentielle ;
- Équation différentielle linéaire d'ordre n , équation différentielle linéaire. Fonctions-coefficients, second membre, écriture sous forme normalisée (ou résolue) ;
- Problème de Cauchy ;
- Équation différentielle linéaire à coefficients constants ;
- Équation différentielle linéaire homogène ;
- Principe de superposition (énoncé dans le cas général ((**HP**) des équations différentielles linéaires, et dans les cas particuliers des équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2 à coefficients constants écrites sous forme normalisée) ;
- Solution particulière et ensemble solution d'une équation différentielle linéaire (énoncé dans le cas général) ;
- Équation différentielle linéaire du 1er ordre (cas général). Équation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficients constants : notations du programme officiel de ECG1 : $y' + ay = b(t)$ ($a \in \mathbb{R}$ et b continue sur l'intervalle I de résolution envisagée) ;
- Caractère $\mathcal{C}^1$ de toute solution d'une équation différentielle linéaire du 1er ordre écrite sous forme normalisée.
- (**HP**) L'ensemble-solution d'une équation différentielle linéaire homogène du 1er ordre sur I est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de référence $(\mathcal{A}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$;
- Résolution (formule générale) d'une équation différentielle linéaire homogène du 1er ordre à coefficients constants écrite sous forme normalisée. Interprétation algébrique ((**HP**) l'ensemble-solution est une droite vectorielle de l'espace vectoriel de référence $(\mathcal{A}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$) ;
- (**HP**) Isomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{S}_{(E)}$ et isomorphisme de $\mathcal{S}_{(E)}$ sur $\mathbb{R}$ (dans le cas où (E) est une équation différentielle linéaire homogène du 1er ordre à coefficients constants écrite sous forme normalisée) ;
- Le théorème de Cauchy-Lipschitz (dans le contexte des équations différentielles linéaires homogènes du 1er ordre à coefficients constants écrites sous forme normalisée), avec précision « effective » ;
- Résolution (formule générale) d'une équation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficients constants écrite sous forme normalisée. Cas particulier où le paramètre a est nul ;
- Le théorème de Cauchy-Lipschitz (dans le contexte des équations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients constants écrites sous forme normalisée) ;
- Solution particulière d'une équation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficients constants écrite sous forme normalisée dans le cas où :

* le second membre est constant ;

- * le second membre est de la forme $t \mapsto P(t)e^{\alpha t}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$) (**HP**).
- (**HP**) Résolution (formule générale) d'une équation différentielle linéaire homogène du 1er ordre (à coefficients non nécessairement constants) écrite sous forme normalisée. Interprétation algébrique ((**HP**) l'ensemble-solution est une droite vectorielle de l'espace vectoriel de référence $(\mathcal{A}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$. Mise en évidence d'une base de l'ensemble-solution) ;
- (**HP**) Résolution (formule générale) d'une équation différentielle linéaire du 1er ordre (à coefficients non nécessairement constants) écrite sous forme normalisée.
- (**HP**) Méthode dite « de la variation de la constante » : principe et exemples d'utilisation (dans le contexte des équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants/à coefficients non constants).
- Équation différentielle linéaire du 2ème ordre (cas général). Équation différentielle linéaire du 2ème ordre à coefficients constants. : notations du programme officiel de ECG1 : $y'' + ay' + by = c(t)$ ($(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et c continue sur l'intervalle I de résolution envisagée) ;
- Caractère $\mathcal{C}^2$ de toute solution d'une équation différentielle linéaire du 2ème ordre écrite sous forme normalisée.
- (**HP**) L'ensemble-solution d'une équation différentielle linéaire homogène du 2ème ordre sur I est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de référence $(\mathcal{A}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$;
- Équation caractéristique associée à une équation différentielle linéaire homogène du 2ème ordre à coefficients constants ;
- Résolution (formule générale) d'une équation différentielle linéaire homogène du 2ème ordre à coefficients constants écrite sous forme normalisée dans le cas où le discriminant de l'équation caractéristique est positif. Interprétation algébrique ((**HP**) l'ensemble-solution est un plan vectoriel de l'espace vectoriel de référence $(\mathcal{A}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$. Mise en évidence d'une base de l'ensemble-solution dans le cas susmentionné) ;
- (**HP**) Isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathcal{S}_{(E)}$ et isomorphisme de $\mathcal{S}_{(E)}$ sur $\mathbb{R}^2$ (dans le cas où (E) est une équation différentielle linéaire homogène du 2ème ordre à coefficients constants écrite sous forme normalisée) ;
- Résolution (formule générale) d'une équation différentielle linéaire du 2ème ordre à coefficients constants écrite sous forme normalisée.
- Le théorème de Cauchy-Lipschitz (dans le contexte des équations différentielles linéaires du 2ème ordre à coefficients constants écrites sous forme normalisée) ;
- Solution particulière d'une équation différentielle linéaire du 2ème ordre à coefficients constants écrite sous forme normalisée dans le cas où :
 - * le second membre est constant ;
 - * le second membre est polynomial (**HP**) ;
 - * le second membre est de la forme $t \mapsto P(t)e^{\alpha t}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$) (**HP**).
- Trajectoire d'une équation différentielle (E) : deux définitions ont été proposées :
 - * (déf.1) toute partie de $\mathbb{R}^2$ égale à $\{ (t, y(t)), t \in I \}$ pour une certaine solution y de (E) ;
 - * (déf.2 (alternative (**HP**))) toute partie de $\mathbb{R}^n$ égale à $\{ (y(t), \dots, y^{n-1}(t)), t \in I \}$ pour une certaine solution y de (E) (où n est l'ordre de l'équation (E)).

Exemples illustrant les deux définitions.

- Existence et unicité d'une trajectoire (déf.1) passant par un point donné : cas des équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2.
- Équilibre d'une équation différentielle. Cas des équations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients constants (où $\mathbf{a} \neq 0$) avec second membre constant, cas des équations différentielles linéaires du 2ème ordre à coefficients constants (où $\mathbf{b} \neq 0$) avec second membre constant.
- Solution convergente d'une équation différentielle. Cas des équations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients constants (où $\mathbf{a} \neq 0$) avec second membre constant, cas des équations différentielles linéaires du 2ème ordre à coefficients constants (où $\mathbf{b} \neq 0$) avec second membre constant.
- **(HP)** Étude de l'équation différentielle non linéaire dite logistique de paramètres $(\mathbf{r}, \mathbf{K})$:

$$(E) : y' = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right) \quad \text{d'inconnue } y \in \mathcal{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$$

Résolution en se ramenant à une équation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficients constants « par un changement d'inconnue ».

Convergence des solutions vers un équilibre.

(l'étude du modèle démographique et les interprétations sous-jacentes n'ont pas été rappelées en cours mais ont été faites en ECG1 et font l'objet d'un exercice guidé au niveau de la feuille de **TD11**).

- **(HP)** Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients non constants non écrite sous forme normalisée : exemple et principe général (raisonnement par analyse-synthèse, résolution sur les intervalles de normalisation et étude du « recollement » des solutions).
- Notation $\mathbf{X}'$ (où $\mathbf{X}$ est une fonction d'un intervalle I à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont les n fonctions composantes sont dérivables sur I).
- $(\mathbf{B}\mathbf{X})' = \mathbf{B}\mathbf{X}'$ (où $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{X}$ est une fonction d'un intervalle I à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont les n fonctions composantes sont dérivables sur I).
- les n fonctions composantes de $\mathbf{Y} : t \mapsto \mathbf{g}(t)\mathbf{V}$ sont dérivables sur I et $\mathbf{Y}' : t \mapsto \mathbf{g}'(t)\mathbf{V}$ (où $\mathbf{g}$ est dérivable sur I et $\mathbf{V} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).
- Système différentiel linéaire homogène du 1er ordre à coefficients constants : définition, exemples. Matrice associée à un système différentiel linéaire homogène.
- Réécriture matricielle de tout système différentiel linéaire homogène.
- **(HP)** L'ensemble-solution d'un système différentiel linéaire homogène du 1er ordre à coefficients constants sur I à n inconnues est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathcal{A}(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})), +, \cdot)$;
- Réécriture matricielle d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants et lien avec la notion de système différentiel linéaire. Généralisation à l'ordre $n \geq 2$ quelconque **(HP)**. Notion de matrice compagnon associée à un polynôme à coefficients réels **(HP)**.
- Théorème de Cauchy-Lipschitz dans le contexte des systèmes différentiels linéaires homogènes du 1er ordre à coefficients constants. Isomorphisme de $\mathcal{S}_{(S)}$ sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si (S) un système différentiel linéaire homogène du 1er ordre à coefficients constants à n inconnues sur I .
- **(HP)** L'ensemble-solution de tout système différentiel linéaire homogène à coefficients constants à n inconnues est de dimension n .

- **(HP)** L'ensemble-solution de toute équation différentielle linéaire homogène d'ordre n est de dimension n .
- Résolution de tout système différentiel linéaire homogène à coefficients constants à n inconnues dans le cas où la matrice du système différentiel est diagonale : formule générale, pratique sur des exemples.
- Résolution de tout système différentiel linéaire homogène à coefficients constants à n inconnues dans le cas où la matrice du système différentiel est triangulaire : méthodologie générale, pratique sur un exemple.
- Lien entre les ensembles-solutions de deux systèmes différentiels dont les matrices associées sont semblables.
- Si λ est une valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et V un vecteur propre associé, alors $t \mapsto e^{\lambda t}V$ est une solution du système différentiel $X' = AX$ d'inconnue $X \in \mathcal{A}(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$.
- Résolution de tout système différentiel dont la matrice associée est diagonalisable : formule générale, pratique sur des exemples. On retrouve la formule générale des solutions de toute équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants écrite sous forme normalisée (dans le cas où l'équation caractéristique possède deux solutions distinctes).
- Résolution guidée de tout système différentiel dont la matrice associée est trigonalisable. On retrouve la formule générale des solutions de toute équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants écrite sous forme normalisée (dans le cas où l'équation caractéristique possède une unique solution).
- Trajectoire d'un système différentiel. Trajectoire associée à une solution d'un système différentiel. Exemples dans le cas « $n = 2$ » (étude de quelques courbes paramétrées « simples » du plan).
- Deux trajectoires différentes d'un même système différentiel sont disjointes.
- Portrait de phase d'un système différentiel.
- Équilibre d'un système différentiel. Caractérisation des équilibres d'un système différentiel. Lien avec l'inversibilité.
- Solution convergente d'un système différentiel.
- Comportement asymptotique de trajectoires dans le cas où la matrice du système est diagonalisable. Notion d'état d'équilibre stable.
- Exemples de portraits de phases dans le cas où la matrice du système différentiel est diagonalisable et carrée d'ordre 2.

Chapitre 12 - Convergences et approximations

- Inégalité de Markov ;
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev ;
- Loi faible des grands nombres. Construction d'intervalles de confiance à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et interprétation. Méthode de Monte-Carlo afin d'estimer une espérance, une probabilité : principe et unification des points de vue, justifications théoriques et implémentations Python.

- **(HP)** Convergence en probabilité d'une suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ vers une variable aléatoire X : définition générale, notation $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. Reformulation de la loi faible des grands nombres.

Savoir-faire et Méthodes à savoir appliquer

« Les incontournables »

- Les incontournables des programmes de colle précédents sont toujours valables cette semaine.
- Résoudre une équation différentielle linéaire homogène du 1er ordre (à coefficients non nécessairement constants) écrite sous forme normalisée.
- Trouver une solution particulière d'une équation différentielle linéaire du 1er ordre, dans le cas où le second membre est de la forme $t \mapsto P(t)e^{\alpha t}$ (où $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$) (donc, en particulier, dans le cas où le second membre est polynomial ou encore constant).
- Mettre en œuvre la méthode de la variation de la constante.
- Résoudre une équation différentielle linéaire homogène du 2ème ordre à coefficients constants écrite sous forme normalisée, dans le cas où le second membre est de la forme $t \mapsto P(t)e^{\alpha t}$ (où $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$) (donc, en particulier, dans le cas où le second membre est polynomial ou encore constant).
- Tracer une trajectoire relative à une équation différentielle linéaire d'ordre au plus 2 (en précisant bien la définition bien utilisée (deux définitions ont été vues en cours)).
- Montrer qu'une solution d'une équation différentielle linéaire est convergente/divergente.
- Résoudre de manière guidée une équation différentielle non linéaire (en se ramenant à une équation différentielle linéaire).
- Résoudre un système différentiel linéaire dont la matrice associée est diagonale.
- Résoudre un système différentiel linéaire dont la matrice associée est triangulaire (en étant éventuellement guidé selon les situations).
- Résoudre un système différentiel linéaire dont la matrice associée est diagonalisable.
- Résoudre un système différentiel linéaire dont la matrice associée est trigonalisable non diagonalisable (en étant guidé au niveau de la trigonalisation).
- Montrer qu'une solution d'un système différentiel donné est convergente/divergente.
- Déterminer les éventuels équilibres d'un système différentiel.
- Déterminer les éventuels équilibres stables d'un système différentiel.
- Prévoir le comportement asymptotique des trajectoires d'un système différentiel à partir du signe des valeurs propres de la matrice du système différentiel.
- Esquisser le portrait de phase d'un système différentiel dont la matrice associée est carrée d'ordre 2 est diagonale (voire diagonalisable non diagonale).
- Appliquer dans des contextes simples les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

« Et plus si affinités ... »

- Montrer des résultats théoriques généraux utilisant les notions du chapitre 11 ou 12 ;
- Étude non guidée de transformées sophistiquées de variables aléatoires à densité ;
- Étude non guidée de transformées de couples « hybrides », ie de variables aléatoires de la forme $f(X, Y)$ avec X discrète et Y à densité ;
- Résolution d'une équation différentielle non linéaire (de manière peu guidée) ;
- Résolution d'une équation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficients non constants non écrite sous forme normalisée : raisonnement par analyse-synthèse (et gestion autonome du problème de recollement).
- Résoudre de manière autonome un système différentiel linéaire dont la matrice associée n'est pas diagonalisable.
- Détermination d'inégalités « à la Markov ».

Preuves exigibles

Propositions

1. Deux trajectoires différentes de la même équation différentielle linéaire homogène du 1er ordre écrite sous forme normalisée sont disjointes **[A]** ;
2. Équilibre d'une équation différentielle du 1er ordre à coefficients constants **[A]** ;
3. « $(BX)' = BX'$ » **[A]** ;
4. Structure de l'ensemble-solution de tout système différentiel linéaire homogène **[A]** ;
5. Réécriture matricielle d'une équation différentielle linéaire homogène du 2ème ordre à coefficients constants **[C]** ;
6. **(HP)** Réécriture matricielle d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre $n \geq 2$ à coefficients constants **[A]**. **(HP)** Citer quelques propriétés des matrices compagnons **[C]** ;
7. **(HP)** Résolution de tout système différentiel dont la matrice associée est diagonale **[C]** ;
8. **(HP ?)** Lien entre les ensembles-solutions de deux systèmes différentiels dont les matrices associées sont semblables **[C]** ;
9. **(HP)** Si λ est une valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et V un vecteur propre associé, alors $t \mapsto e^{\lambda t}V$ est une solution du système différentiel $X' = AX$ d'inconnue $X \in \mathcal{A}(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ **[C]** ;
10. **(HP ?)** Résolution de tout système différentiel dont la matrice associée est diagonalisable **[C]** ;
11. Résolution des équations différentielles linéaires homogènes du 2ème ordre à coefficients constants écrite sous forme normalisée en utilisant un système différentiel (dans le cas où l'équation caractéristique possède 2 solutions distinctes) **(Remarque 55)** **[C]** ;
12. X est un équilibre du système différentiel linéaire homogène de matrice A si et seulement si il existe $V \in \ker(A)$ tel que pour tout $t \in I$, $X(t) = V$ **[C]** ;
13. Comportement asymptotique des trajectoires dans le cas diagonalisable **[A]**.
14. Inégalité de Markov (Preuve dans le cas des v.a à densité **[A]** et preuve dans le cas général **[C]**) ;
15. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev **[C]** ;
16. Loi Faible des Grands Nombres (LFGN) **[C]** ;
17. **(HP)** Pour toute suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{B}(p)$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leq \mathbb{P}(p \in [\overline{X}_n - \varepsilon; \overline{X}_n + \varepsilon]) \quad \text{[P]}$$

Exemples/ exercices

1. Résolution complète et autonome de l'équation différentielle :

$$(E) : y'' - 2y' + y = 2e^{2t} \text{ d'inconnue } y \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad [C]$$

2. Soit $(r, K) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

Résolution complète et autonome de l'équation différentielle logistique de paramètres (r, K) :

$$(E) : y' = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right) \text{ d'inconnue } y \in \mathcal{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$$

Allure des trajectoires selon la condition initiale « $y(0)$ » $[C]$.

3. Résolution complète et autonome de l'équation différentielle :

$$(E) : ty' + y = 1 \text{ d'inconnue } y \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad [C]$$

4. Représentation graphique de plusieurs trajectoires (selon les deux définitions données dans le polycopié de cours) de l'équation différentielle :

$$(E) : y' + y = 0 \text{ d'inconnue } y \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad [C]$$

5. Résolution, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$:

$$(E) : \alpha y' + \beta y = 0 \text{ d'inconnue } y \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad [TD]$$

6. Résolution complète et autonome de l'équation différentielle :

$$(E) : (1 + t^2) y'' + 4ty' + (1 - t^2) y = 0 \text{ d'inconnue } y \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad [TD]$$

7. Réécrire sous forme matricielle l'équation différentielle :

$$(E) : y^{(4)} - y^{(3)} + 4y = 0 \text{ d'inconnue } y \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad [C]$$

8. Étude du comportement asymptotique des solutions de :

$$(E) : y''' + 3y'' + 2y' = 0 \text{ d'inconnue } y \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad [C]$$

9. Résolution du système différentiel $X' = DX$ d'inconnue $X \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}))$ où $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $[C]$.

10. Résolution du système différentiel $X' = TX$ d'inconnue $X \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}))$ où $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $[C]$.

11. Résolution du système différentiel $X' = AX$ d'inconnue $X \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}))$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $[C]$.

12. Détermination et représentation graphique des équilibres du système différentiel linéaire homogène du 1er ordre à coefficients constants sur $\mathbb{R}$ dont la matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $[C]$.

13. Représentation graphique du portrait de phase d'un système différentiel linéaire homogène du 1er ordre à coefficient constant dont la matrice du système est carrée d'ordre 2 est diagonale **[C]** ;
14. On lance 400 fois une pièce truquée amenant Face à chaque lancer avec la probabilité 0,8. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de Face obtenus après les 400 lancers, définie sur un espace probabilisé adéquat $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ adéquat que l'on ne cherchera pas à expliciter. Déterminer un minorant strictement positif de la probabilité $\mathbb{P}(300 < X < 340)$ **[C]**.
15. Écriture d'un script Python permettant d'illustrer la Loi Faible d'un Grand Nombres **[C]**.

[A] : Annexe **Preuves** ;

[C] : Preuve traitée au tableau **en cours** ;

[Poly] : Preuve traitée dans le polycopié ;

[Ac] : Annexe **Corrections** ;

[TD] : Travaux Dirigés

Informatique

Tout le contenu des polycopiés :

- **TP1 - Cours (rappels) et TP1 - Exercices**
- **TP2 - Algorithmique de listes (rappels)** [calcul du (second) minimum (et indices associés), (second) maximum (et indices associés), des valeurs les plus proches (et indices associés), recherche dichotomique dans une liste triée, algorithmes gloutons (« plus grand nombre », « déplacement d'une grenouille », rendu de monnaie, problème des conférenciers), algorithmes de tri (**HP**) (tri-bulles et tri-par-insertion)].
- **TP3 - Calculs numériques** [algorithme de dichotomie, méthode de point fixe, méthode de Newton-Raphson (**HP**), méthode des rectangles permettant le calcul approché d'une intégrale sur un segment(**HP**), application au calcul des valeurs approchées des valeurs prises par la fonction de répartition de toute variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ (**HP**)].
- **TP4 - Graphes (rappels)** [révision du vocabulaire et des théorèmes du programme, représentation d'un graphe avec Python (matrice numpy d'adjacence, liste des listes d'adjacence, dictionnaire), fonctions de conversion d'une représentation à une autre, divers exercices de manipulation de graphes (ordre, nombre d'arêtes, caractère adjacent de deux sommets, voisinage, degré, caractère isolé d'un sommet, caractère simple, complet, eulérien d'un graphe, calcul du nombre de chaînes reliant deux sommets donnés, calcul des distances combinatoires à un sommet dans un graphe simple, calcul de l'excentricité, du diamètre d'un graphe, algorithme de Dijkstra (calcul d'une chaîne de poids minimal)].
- **TP5 - Simulation d'expériences aléatoires - le cas discret (rappels et compléments)** [diagramme en bâtons (**bar**), la fonction **unique** ((**HP**), à savoir donc implémenter à la main), matrices de booléens (pour compter le nombre de coefficients d'un tableau **numpy** vérifiant une contrainte donnée), les fonctions **random**, **randint**, **binomial**, **geometric**, **poisson** de la sous-bibliothèque **random** de la bibliothèque **numpy**, méthode de Monte-Carlo (estimation d'une espérance (moments, espérance de transformées), d'une probabilité, ...), divers exercices (tirages avec remise, sans remise, selon un protocole plus « exotique », marches aléatoires, graphes aléatoires d'Erdős-Renyi (estimation du nombre d'arêtes, du nombre de sommets isolés, de la probabilité qu'il soit connexe, etc))]
- **TP6 - Bases de données et langage SQL** [entité, table, base de données, attribut, descripteur, domaine, type, enregistrement, champ, schéma de table, schéma relationnel d'une base de données, clé primaire, clé étrangère, requête SQL de création de table (**CREATE TABLE ...**) (avec éventuellement déclaration des clés primaires et étrangères (**PRIMARY KEY(...)**, **FOREIGN KEY(...)** **REFERENCES ...**), insertion des données dans une table (**INSERT INTO ... VALUES**), suppression des données dans une table (**DELETE FROM ...**, **DELETE FROM ... WHERE**), suppression d'une table (**DROP TABLE ...**) (**HP**), modification des données d'une table (**UPDATE ... SET ... WHERE ...**), projection sans contrainte (**SELECT ... FROM ...**), projection sans doublon (**SELECT DISTINCT ... FROM ...**), projection avec données triées dans l'ordre croissant/décroissant (**SELECT ... FROM ... ORDER BY ... ASC/DESC**), projection avec données tronquées (**SELECT ... FROM ... LIMIT ... OFFSET ...**), projection avec renommage (**AS**), restriction (projection avec contrainte) (**SELECT ... FROM ... WHERE ...**), produit cartésien de deux tables, jointure de deux tables (**SELECT ... FROM ... INNER JOIN ... ON ... =**), opérateurs ensemblistes (**UNION**, **INTERSECT**, **EXCEPT**), fonction d'agrégation (**COUNT(...)**, **SUM(...)**, **AVG(...)**, **MIN(...)** et **MAX(...)**), utilisation des fonctions d'agrégation sur des « groupes » (**GROUP BY HAVING ...**) ((**HP**))]
- **TP7 - Chaînes de Markov** [simulation d'une trajectoire et représentations graphiques, calcul « exact » de la loi de X_n à l'aide des puissances de la matrice de transition (en utilisant les fonctions

`np.dot` et `al.matrix_power`), estimation de la loi de X_n à l'aide de la méthode de Monte-Carlo, mise en évidence de la convergence (sous réserve d'existence) de la chaîne de Markov, mise en évidence d'une loi stationnaire (ou bien grâce à la « loi limite » mise en évidence au niveau du point précédent, ou bien en donnant un vecteur propre de tM associé à la valeur propre **1**, à coefficients positifs et dont la somme vaut **1** (utilisation des fonctions `al.eig` et `np.sum`)), simulation du premier l'instant où la chaîne de Markov est passée pour la k ème fois par l'état initial, simulation du premier instant où la chaîne de Markov est passée au moins une fois par tous ses états, étude approfondie des exemples suivants : lancers de deux pièces suivant un protocole particulier, un modèle épidémiologique, un modèle simplifié de « bonus-malus » utilisé par les assurances automobiles, l'algorithme de *PageRank* de Google]

- **(Annexe Python - Chapitre 11)** [Utilisation de la fonction `odeint` de la sous-bibliothèque `integrate` de la bibliothèque `scipy` pour représenter des trajectoires d'une équation différentielle linéaire d'ordre **1**, d'un système différentiel linéaire homogène d'ordre **1** et d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre **2**]

sont au programme de cette semaine (y compris toutes les extensions hors-programme **(HP)**).

On pourra proposer aux étudiants des questions de cours d'informatique et/ou des exercices, en s'inspirant très fortement des exercices présents dans les polycopiés susmentionnés.

Quelques remarques destinées aux colleurs

- La colle commencera par quelques questions de cours (restitution d'une définition, d'une proposition/théorème, d'une ou des méthodes de base) ;
- On pourra demander aux élèves de prouver un des théorèmes (de manière complète ou incomplète) répertoriés dans la rubrique **Preuves exigibles** et tester la compréhension des élèves à propos de ce qu'ils écrivent ;
- On évitera autant que possible de consacrer plus d'une demi-heure aux questions de cours ;
- Les exercices proposés devront être de niveau progressif : les premiers exercices doivent être très proches du cours ;
- La méthode dite de variation de la double constante n'a jamais été abordée en classe ;
- On accordera un soin tout particulier à la rédaction et à la rigueur ;
- Toute erreur répertoriée dans le document Erreurs graves sera lourdement sanctionnée ;
- Si l'élève interrogé ne répond pas correctement aux questions de cours, on attribuera une note strictement inférieure à la moyenne, et ce indépendamment de la suite de l'interrogation orale.